Théorème de Nagel.

Soient ABC un triangle non rectangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On note H l'orthocentre du triangle ABC et O le centre de $\mathcal{C}$.

1) En utilisant la tangente Δ_A menée de A au cercle $\mathcal{C}$, montrer que les angles orientés de droites (AB, AI) et (AO, AC) sont égaux. En déduire que les couples de droites $((AB), (AC))$ et $((AI), (AO))$ ont les mêmes bissectrices.

> De façon générale, on dit que les droites D_1', D_2' sont isogonales relativement (ou par rapport) aux droites sécantes D_1, D_2 si l'égalité $(D_1, D_1') = (D_2', D_2)$ (π) entre angles de droites est vérifiée. Le lecteur vérifiera que cela revient à dire que les couples de droites (D_1, D_2) et (D_1', D_2') ont mêmes bissectrices. Le Théorème de Nagel, qui est l'objet de cette première question, peut être énoncé en disant que les droites (AB), (AC) sont isogonales relativement aux droites sécantes (AI), (AO).

2) Vérifier que les points B, K, J, C sont cocycliques. Puis, en utilisant la première question, montrer l'égalité entre angles de droites $(JK, JB) = (\Delta_A, JB)$ (π). En déduire que les droites (OA) et (JK) sont perpendiculaires.

Solution :

[0] [utri0028] v1.00β Dany-Jack Mercier (réf. Sortais 87, p. 26 et 26 adaptés)

[redacted]

utri0028 (A brocher avec l'énoncé de utri0028)

Exercice : Théorème de NAGEL

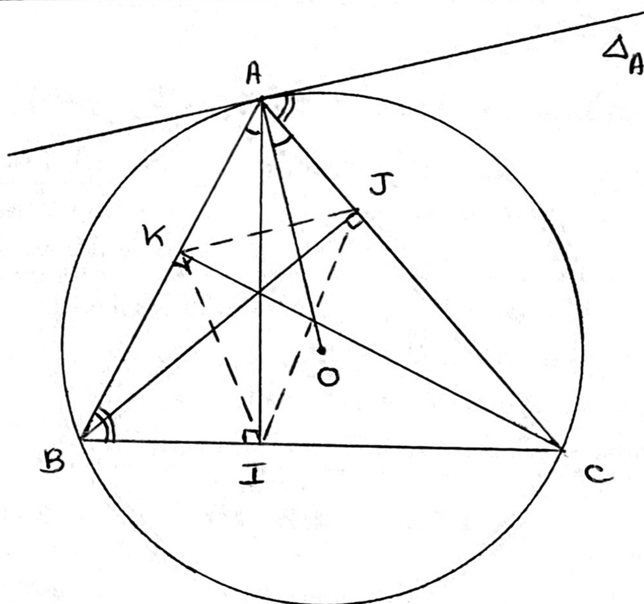
Soient ABC un triangle non rectangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C de ce triangle. On note H l'orthocentre du triangle ABC et O le centre de $\mathcal{C}$.

1) En utilisant la tangente Δ_A en A à $\mathcal{C}$, montrer que les angles orientés de droites (AB, AI) et (AO, AC) sont égaux. En déduire que les couples de droites $((AB),(AC))$ et $((AI),(AO))$ ont les mêmes bissectrices (c'est le théorème de Nagel).

2) Vérifier que les points B, K, J, C sont cocycliques. A partir de cette cocyclicité et de la première question, montrer l'égalité entre angles de droites : $(JK, JB) = (\Delta_A, JB)$. En déduire que les droites (OA) et (JK) sont perpendiculaires.

1)

$$(AO, AC) = \frac{\pi}{2} + (\Delta_A, AC)$$
$$= \frac{\pi}{2} + (BA, BC) \quad \text{(cocyclicité)}$$
$$= \frac{\pi}{2} + (BA, AI) + \underbrace{(AI, BC)}_{=\frac{\pi}{2}}$$
$$= (BA, AI) \quad [\pi]$$



Conseil : pour le 1), raisonner d'abord en mettant les angles géométriques en évidence sur la figure.

* Soit Δ l'une des bissectrices de (AB, AC). On aura :

$$(AI, \Delta) = (AI, AB) + (AB, \Delta) = (AC, AO) + (\Delta, AC) = (\Delta, AO)$$

donc Δ sera l'une des bissectrices de (AI, AO) .

(réf. Sortais 87 p26 et 28 adaptés)

2) * B, K, J, C sont sur le cercle de diamètre [BC]

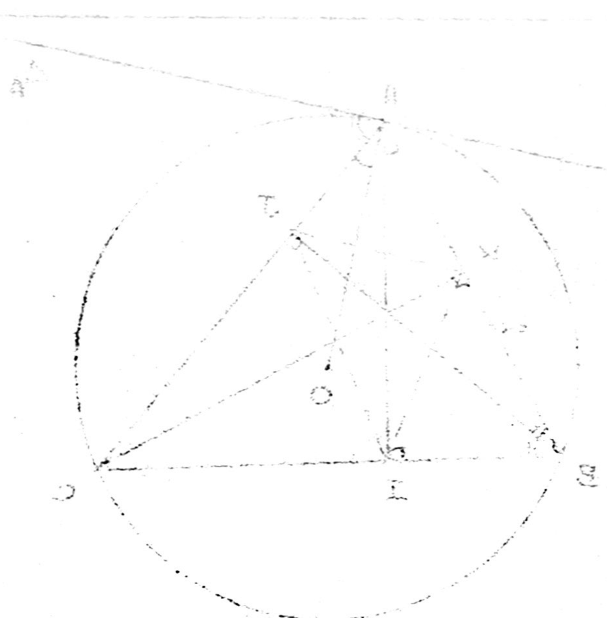
* On a

$$\begin{cases} (JK, JB) = (CK, CB) \quad [\pi] \quad \text{par cocyclicité} \\ (\Delta_A, JB) \underset{\perp}{=} (AO, AC) \underset{a)}{=} (AB, AI) \underset{\perp}{=} (CK, CB) \quad [\pi] \end{cases}$$

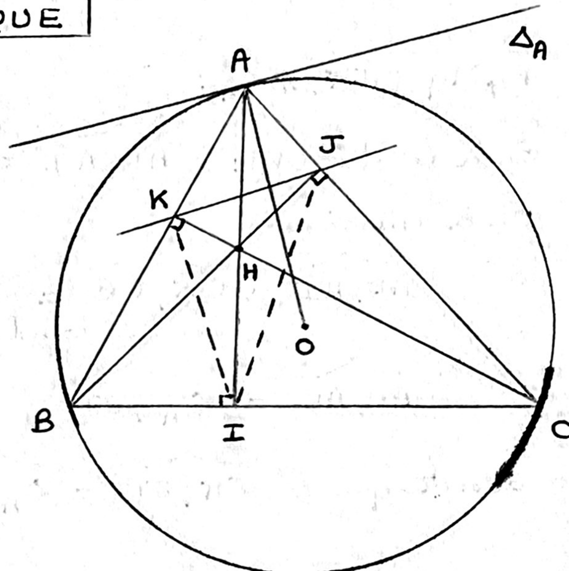
d'où l'égalité

* $(JK, JB) = (\Delta_A, JB) \quad [\pi] \Rightarrow (JK) \parallel \Delta_A$

et comme $(OA) \perp \Delta_A$, cela entraine $(JK) \perp \Delta_A$



BISSECTRICES DU TRIANGLE ORTHIQUE



ABC triangle non rectangle

I, J, K pieds des hauteurs issues de A, B, C

H orthocentre de A, B, C

O centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC.

a) En utilisant la tangente Δ_A à $\mathcal{C}$ en A, montrer que les angles orientés de droites $\widehat{AB, AI}$ et $\widehat{AO, AC}$ sont égaux. En déduire que les couples de droites ((AB), (AC)) et ((AH), (AO)) ont les mêmes bissectrices (Théorème de Nagel)

b) En utilisant le a) et le critère de cocyclicité, montrer que $(JK) \parallel \Delta_A$.
En déduire $(OA) \perp (JK)$

c) Prouver que les points A, I, J, B (resp. I, K, A, C) sont cocycliques et en déduire que la hauteur (AI) est aussi bissectrice de ((IK), (IJ)).

d) Si ABC est acutangle, montrer que I, J et K sont sur les côtés du triangle ABC. En déduire que (AI) est la bissectrice du couple de demi-dtes ([IK), [IJ))

utri0008

outils utilisés :
- angles de droites
- critère de cocyclicité
- produit scalaire (d)
- convexité du ½ plan (d)

a)

* Montrons que $\widehat{AB, AI} = \widehat{AO, AC}$ (1)

ABI étant rectangle en I, $\widehat{AB, AI} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BC, AB}$ $[\pi]$

$(OA) \perp \Delta_A$ donc $\widehat{AO, AC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AC, \Delta_A}$

L'égalité (1) provient alors de la définition de Δ_A qui entraine

$$\widehat{BC, BA} = \widehat{AC, \Delta_A}$$

* Si D est une bissectrice du couple de droites ((AI), (AO)), alors

$$\widehat{AB, D} = \widehat{AB, AI} + \widehat{AI, D} \underset{(1)}{=} \widehat{AO, AC} + \widehat{D, AO} = \widehat{D, AC}$$

prouve que D est aussi bissectrice de ((AB), (AC))

(réf. Sortais 87 p 26 et p 28 adaptés)

b) * Mq $(JK) // \Delta_A$:

On a montré (1) : $\widehat{AB, AI} = \widehat{AO, AC}$

On a aussi :

$$\widehat{AB, AI} = \widehat{CK, CB} \underset{\text{cocycl.}}{=} \widehat{JK, JB}$$

$$\widehat{AO, AC} = \widehat{\Delta_A, JB} \quad \text{(droites orthogonales)}$$

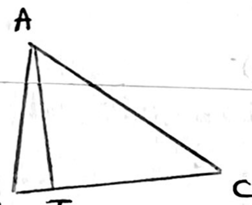
de sorte que $\widehat{JK, JB} = \widehat{\Delta_A, JB} \Rightarrow (JK) // \Delta_A$

* $(OA) \perp \Delta_A$ et $(JK) // \Delta_A$ entraînent $\boxed{(OA) \perp (JK)}$.

c) Par cocyclicité :

$$\widehat{IK, IA} = \widehat{CK, CA} \quad \text{et} \quad \widehat{IA, IJ} = \widehat{BA, BJ}$$

Il suffit de voir que $\widehat{CK, CA} = \widehat{BA, BJ}$ (droites orthogonales 2 à 2) pour conclure à $\widehat{IK, IA} = \widehat{IA, IJ}$, ie à (IA) est bien une bissectrice de $\widehat{IK, IJ}$ (angle de droites !)



d) * Si ABC est acutangle, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ appartiennent à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc :

$\vec{BA}.\vec{BC} = BA.BC.\cos\hat{B} = \overline{BI}.\overline{BC} > 0 \Rightarrow I \in]BC)$
$\vec{CA}.\vec{CB} = CA.CB\cos\hat{C} = \overline{CI}.\overline{CB} > 0 \Rightarrow I \in]CB)$
$\} \Rightarrow \boxed{I \in]BC[}$

Idem avec J et K.

* Soit s la réflexion d'axe (AI). On a montré au c) :

$$s((IK)) = (IJ)$$

Soit P_A le demi-plan de frontière [BC] contenant A

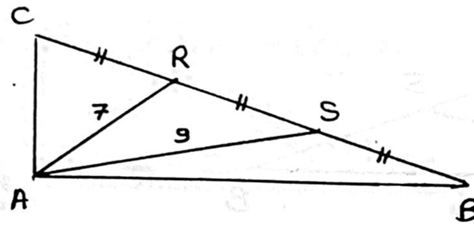
$(AI) \perp (BC)$ donc $s(P_A) \subset P_A$.

$A \in P_A \Rightarrow [AB] \in P_A \Rightarrow K \in P_A$ (car $K \in]AB[$) $\Rightarrow [IK) \subset P_A$

et $s([IK))$ sera une demi-droite d'origine I de P_A incluse dans (IJ). Ce ne peut être que [IJ) qui est incluse dans P_A ! Donc $s([IK)) = [IJ)$ ie (AI) est bissectrice du couple de 2 demi-dtes ([IK), [IJ)).

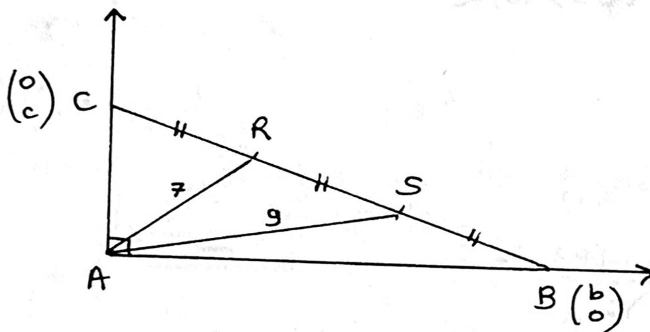
NB : Les pts I, J, K sont sur une ligne brisée qui est "trajectoire de lumière" au sens de Sortais87, p28.

On donne le dessin suivant où ABC est un triangle rectangle en A :



Calculer BC

1° méthode : On introduit un repère orthonormé adéquat.



R = bary. de $C(2)$, $B(1)$, donc $R\begin{pmatrix} b/3 \\ 2c/3 \end{pmatrix}$

De même $S\begin{pmatrix} 2b/3 \\ c/3 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} AR^2 = \frac{1}{9}(b^2+4c^2) = 49 \\ AS^2 = \frac{1}{9}(4b^2+c^2) = 81 \end{cases}$

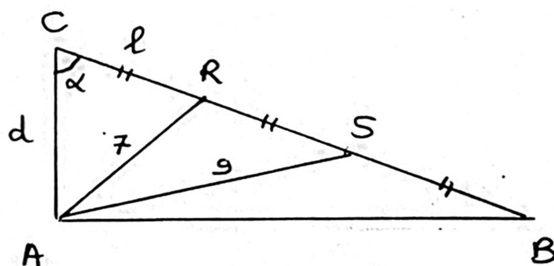
$\begin{cases} 4b^2+c^2 = 729 \\ b^2+4c^2 = 441 \end{cases}$

que l'on résout. On trouve $b^2 = 165$ et $c^2 = 69$, d'où :

$BC^2 = b^2+c^2 = 234$

$\boxed{BC = 3\sqrt{26}}$

2° méthode : On utilise la relation $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$ vraie dans n'importe quel triangle ABC. On l'applique à chacun des triangles ACR, ACS et ACB :



$$\begin{cases} 9\ell^2 - d^2 = AB^2 = d^2 + (3\ell)^2 - 2d(3\ell)\cos\alpha \\ 49 = d^2 + \ell^2 - 2d\ell\cos\alpha \\ 81 = d^2 + (2\ell)^2 - 2d(2\ell)\cos\alpha \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} d = 3\ell\cos\alpha \\ d^2 + \ell^2 - 2d\ell\cos\alpha = 49 & (1) \\ d^2 + 4\ell^2 - 4d\ell\cos\alpha = 81 & (2) \end{cases}$$

~~(1) et (2) entraînent $-d^2 + 2\ell^2 = 81 - 2\times 49 \Leftrightarrow d^2 = 2\ell^2 + 17$~~

~~En injectant $\ell\cos\alpha = \frac{d}{3}$ et $d^2 = 2\ell^2 + 17$ dans (1), on obtient :~~

~~$d^2 + \ell^2 - \frac{2}{3}d^2 = 49$~~

~~$\frac{d^2}{3} + \ell^2 = 49$~~

~~$\frac{2\ell^2+17}{3} + \ell^2 = 49$~~

~~$\ell^2 = 26$~~

~~D'où $BC = 3\ell = 3\sqrt{26}$~~.

plutôt

En remplaçant $\cos\alpha = \frac{d}{3\ell}$ dans (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{3} + \ell^2 = 49 \\ -\frac{d^2}{3} + 4\ell^2 = 81 \end{cases}$$

$5\ell^2 = 130$

$\ell^2 = 26$

$\ell = \sqrt{26}$

d'où $BC = 3\ell = 3\sqrt{26}$

cqfd

Montrer que les projetés orthogonaux du sommet A d'un triangle ABC sur les bissectrices intérieures et extérieures issues de B et C, sont alignés.

ABC est un triangle. Notons

B_I = projeté orth. de A sur la bissectrice intérieure Δ_B issue de B

B_E = " " extérieure Δ'_B "

C_I = " " intérieure Δ_C issue de C

C_E = " " extérieure Δ'_C "

Notons L le symétrique de A par rapport à B_E

M " " " à B_I

U " " " à C_I

V " " " à C_E

Comme Δ'_B est axe de symétrie du couple de demi-dtes $([BA, -[BC))$, on aura $L \in -[BC)$.

De même on aura $M \in [BC)$. Ainsi $L \neq M$ et $(LM) = (BC)$.

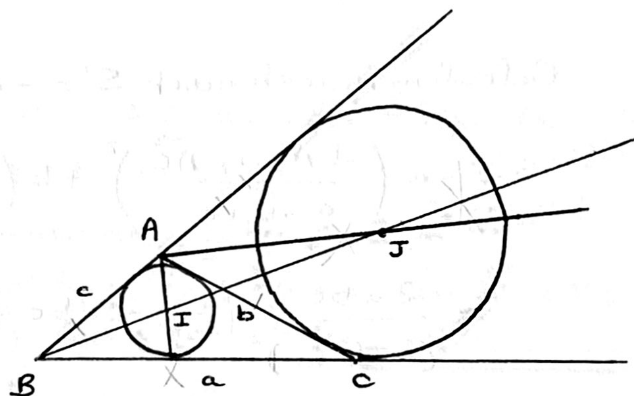
On montrerait de la m̂ façon que $U \neq V$ et $(UV) = (BC)$.

Finalement, les points B_I, B_E, C_I, C_E seront les images des pts M, L, U, V par l'homothétie $h_{A,\frac{1}{2}}$.

Comme les pts M, L, U, V sont alignés sur (BC), les points B_I, B_E, C_I, C_E seront alignés sur la droite $h_{A,\frac{1}{2}}((BC))$ □

Application des barycentres :

Soient ABC un triangle dont les côtés mesurent a, b, c centimètres ; I le centre du cercle inscrit à ce triangle, et J le centre du cercle exinscrit à ce triangle situé sur la bissectrice de $\hat{B}$.



Montrer que :

$$a\,IA^2 + b\,IB^2 + c\,IC^2 = -a\,JA^2 + b\,JB^2 - c\,JC^2$$

---

* On sait que I est le barycentre de A(a), B(b), C(c)*
J " " A(a), B(−b), C(c) $(a-b+c\neq 0)$

de sorte que l'on puisse exprimer chacune des sommes proposées en fonction de a, b et c :

$$S \doteq a\,IA^2 + b\,IB^2 + c\,IC^2 = a\left(\frac{b\vec{AB}+c\vec{AC}}{a+b+c}\right)^2 + b\left(\frac{a\vec{BA}+c\vec{BC}}{a+b+c}\right) + c\left(\frac{a\vec{CA}+b\vec{CB}}{a+b+c}\right)^2$$

$$= \frac{2abc}{(a+b+c)^2}\left(ab+bc+ac + \vec{AB}.\vec{AC} + \vec{BA}.\vec{BC} + \vec{CA}.\vec{CB}\right)$$

D'après Al Kashi, $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, donc

$$\vec{AB}.\vec{AC} = cb\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \qquad (1)$$

En appliquant la formule (1) :

$$\vec{AB}.\vec{AC} + \vec{BA}.\vec{BC} + \vec{CA}.\vec{CB} = \frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \qquad (2)$$

donc

$$S = \frac{2abc}{(a+b+c)^2}\left(ab+bc+ac+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right) = abc$$

(réf. Durande 1-S, 1982, Alg-géo. indiqué par galbas) (* [T] Barycentres)

Ainsi : $\boxed{S = abc}$

Calculons maintenant $S' = -a\,JA^2 + b\,JB^2 - c\,JC^2$:

$$S' = -a\left(\frac{-b\vec{AB} + c\vec{AC}}{a-b+c}\right)^2 + b\left(\frac{a\vec{BA} + c\vec{BC}}{a-b+c}\right)^2 - c\left(\frac{a\vec{CA} - b\vec{CB}}{a-b+c}\right)^2$$

$$= \frac{2abc}{(a-b+c)^2}\left(-ab - bc + ac + \vec{AB}.\vec{AC} + \vec{BA}.\vec{BC} + \vec{CA}.\vec{CB}\right)$$

$$= \frac{2abc}{(a-b+c)^2}\left(-ab - bc + ac + \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right) \qquad \text{(d'après (2))}$$

$$\boxed{S' = abc}$$

ce qui achève la démonstration.